



Diophante d'Alexandrie est un mathématicien de langue grecque ayant vécu à Alexandrie entre le I^{er} siècle et le IV^e siècle. Connu pour ses *Arithmétiques*, ouvrage dont une partie est aujourd'hui perdue, il est parfois surnommé le « père de l'algèbre ».

Une **équation diophantienne** est une équation à coefficients entiers et à solutions entières.

Exemple d'équation diophantienne : $315x - 544y = 10$.

Ensemble des solutions : $S = \{(190 - 544k ; 110 - 315k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Mérodore, un mathématicien grec du VI^e siècle, imagine l'épithaphe de la tombe de Diophante sous forme d'énigme mathématique :

L'enfance de Diophante occupa un sixième de toute sa vie.

Le douzième fut pris par son adolescence.

Après une nouvelle période équivalente au septième de sa vie, il se maria.

Cinq ans plus tard, il eut un fils.

La vie de ce fils fut exactement une demie de celle de son père.

Diophante mourut quatre ans après la mort de son fils.

Cette énigme fut versifiée en alexandrins au XIX^e siècle par un Français anonyme :

Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
 Et quelques vers tracés par une main savante
 Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
 Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
 Le sixième marqua le temps de son enfance ;
 Le douzième fut pris par son adolescence.
 Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
 Puis, s'étant marié, sa femme lui donna
 Cinq ans après un fils qui, du destin sévère
 Reçut de jours, hélas ! deux fois moins que son père.
 De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
 Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

04-01 Activités

Activité 1

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Le nombre $11^4 - 3^4$ est un multiple de :

- (1) 11 (2) 3 (3) 112

2 Le nombre $17^5 - 13^5$ est divisible par :

- (1) 4 (2) 7 (3) 10

3 La somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours divisible par :

- (1) 3 (2) 4 (3) 5

4 a et n désignent deux nombres entiers relatifs tels que a divise $2n + 1$ et a divise $n + 3$.

Alors a divise :

- (1) 5 (2) 4 (3) 7

5 n est un nombre entier naturel tel que n divise $n + 8$.

Alors, n est un diviseur de :

- (1) 3 (2) 5 (3) 8

6 « n est un entier naturel tel que $n + 2$ divise $n + 3$. »

Alors cette affirmation est :

- (1) vraie pour tout entier naturel n ;
 (2) vraie pour un unique entier naturel n ;
 (3) fausse pour tout entier naturel n .

7 Le reste de la division euclidienne de -15 par 4 est égal à :

- (1) -3 (2) 3 (3) 1

8 On peut lire le quotient et le reste de la division euclidienne de 275 par 14 avec l'égalité :

(1) $275 = 14 \times 18 + 23$

(2) $275 = 14 \times 19 + 9$

(3) $275 = 14 \times 20 - 5$

9 a désigne un nombre entier naturel.

Le reste de la division euclidienne de a par 144 est 67 .

Alors le reste de la division euclidienne de a par 36 est :

- (1) 4 (2) 31 (3) 67

10 La congruence vraie est :

(1) $48 \equiv 21 [6]$ (2) $37 \equiv 9 [7]$ (3) $59 \equiv 26 [13]$

11 a désigne un entier relatif.

La congruence $a \equiv 30\,757 [10]$ peut aussi s'écrire :

(1) $a \equiv 0 [10]$ (2) $a \equiv 3 [10]$ (3) $a \equiv 7 [10]$

12 a est un entier naturel tel que $a \equiv -32 [8]$.

Alors, a peut être égal à :

- (1) 37 (2) 88 (3) -47

Activité 2

On dispose de deux sabliers permettant de mesurer les durées suivantes :

- 4 minutes
- 7 minutes

On considère que le retournement d'un sablier est instantané.

- On veut cuire un œuf durant exactement 3 minutes.
Comment procéder ?
- Dans le contexte de ce problème, interpréter l'égalité $4 \times 3 + 7 \times 2 = 26$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il est possible de trouver deux entiers x et y vérifiant l'équation $4x + 7y = n$.
- Montrer qu'il existe des couples de sabliers ne permettant pas d'obtenir le résultat de la question 3.
- Quelle propriété des sabliers permet le résultat de la question 3. ?



04 PGCD**04-01 Diviseurs communs de deux entiers****Définition et notation**

Soient a et b deux entiers naturels non tous deux nuls.

On note $D(a ; b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et b .

Exemple

$$D(48 ; 54) = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}.$$

$$D(16 ; 21) = \{1\}.$$

$$D(0 ; 14) = \{1 ; 2 ; 7 ; 14\}.$$

Remarques

- L'ensemble $D(a ; b)$ contient toujours 1 : il n'est donc jamais vide.
- $D(a ; b) \subset D(a)$ et $D(a ; b) \subset D(b)$.

Comme $D(a)$ ou $D(b)$ a un nombre fini d'éléments, alors $D(a ; b)$ a un nombre fini d'éléments.

Définition et notation

Soient a et b deux entiers naturels non tous deux nuls. Le plus grand élément de $D(a ; b)$ est appelé **plus grand diviseur commun** de a et de b . On le note **PGCD($a ; b$)**.

Exemples

$$\text{PGCD}(48 ; 54) = 6$$

$$\text{PGCD}(16 ; 21) = 1$$

$$\text{PGCD}(0 ; 14) = 14$$

Remarque

Si d est le PGCD de a et b , alors on a $D(a ; b) = D(d)$.

Propriété

Soit r le reste dans la division euclidienne a par b non nul. On a $D(a ; b) = D(b ; r)$.

Méthode *Algorithme d'Euclide*

En appliquant cette propriété plusieurs fois à partir de deux nombres a et b , on finit par obtenir un reste nul. Le dernier reste non nul est le PGCD de a et b .

04-01 Applications du cours**Application 1**

1. Écrire 5544 et 1652 sous la forme de produits de facteurs premiers.
2. En déduire leur PGCD.
3. Retrouver ce PGCD en appliquant l'algorithme d'Euclide.

Application 2

On dispose de 848 dragées et 256 billes de sucre avec lesquels on souhaite confectionner des sachets identiques.

1. Peut-on confectionner 2 sachets identiques ? 3 sachets identiques ? Préciser le contenu éventuel de chaque sachet.
2. Déterminer le nombre maximal de sachets identiques possible. Préciser le contenu de chaque sachet.

**Application 3**

Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$.

1. Étudier les affirmations suivantes.
 - a] « Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$. On a $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a ; \lambda a + b)$ ».
 - b] « Soient λ et μ dans $\mathbb{Z}^*$ tels que $\lambda a + \mu b \neq 0$. On a $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a ; \lambda a + \mu b)$ ».
 - c] « Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$. On a $\text{PGCD}(\lambda a ; \lambda b) = \lambda \text{PGCD}(a ; b)$ ».
2. Déterminer sans calculatrice la valeur de $\text{PGCD}(910 ; 1300)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = n - 1$ et $b = 3n + 2$.
 - a] Démontrer que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a ; 5)$.
 - b] Déterminer, selon la valeur de n , le PGCD de a et b .
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \equiv 9 [17] \Leftrightarrow \text{PGCD}(9n + 4 ; 2n - 1) = 17$.

Application 4

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $\text{PGCD}(2k + 1 ; 9k + 4)$.
2. Déterminer $\text{PGCD}(k^2 + 2k ; k + 3)$ selon le reste de la division de k par 3.